Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный индустриальный университет»

Кафедра прикладной математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Директор института
информационных технологий и
автоматизированных систем
_____ А.В. Зимин
подпись
«____» _____ 20___ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Вариационное исчисление

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
(направленность (профиль): «Математическое моделирование и интеллектуальный анализ данных»)

Квалификация выпускника
Бакалавр

Форма обучения
Очная форма

Срок обучения: 4 года

Год начала подготовки 2025

Новокузнецк
2025

СибГИУ
Подлинник электронного документа хранится в системе электронного согласования документов СибГИУ
ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭП
Сертификат: daba56d7b892efca3bf5c04ed0251c98b19b099c
Владелец: Директор ИИТиАС Зимин Алексей Валерьевич
Действителен: с 15 января 2025 г. по 10 апреля 2026 г.
Дата и время: 10-04-2025 15:01:41 ПРОВЕРИТЬ ПОДПИСЬ

1 Цели и задачи освоения учебной дисциплины

Целями учебной дисциплины являются:
– освоение основных понятий вариационного исчисления;
– формирование навыков применения инструментов вариационного исчисления.

Задачами учебной дисциплины являются:
– изучение основных задач вариационного исчисления и методов их решения;
– применение методов вариационного исчисления в решении задач практического содержания.

2 Место учебной дисциплины в структуре ООП по направлению подготовки (специальности)

Учебная дисциплина относится к учебным дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений **Блока 1 «Дисциплины (модули)»** ООП по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

Учебная дисциплина базируется на предварительном усвоении обучающимися учебных дисциплин:
– Математика;
– Специальные главы математики.

Учебная дисциплина дополняет знания и умения, получаемые по одновременно изучаемым и последующим учебным дисциплинам:
– Методы оптимизации;
– Анализ временных рядов и прогнозирование.

3 Планируемые результаты обучения по учебной дисциплине

Процесс изучения учебной дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

– Профессиональные компетенции

Наименование категории (группы) ПК	Код и наименование ПК	Код и наименование индикатора достижения ПК	Планируемые результаты обучения
	ПК-2: Способен проводить аналитические исследования с применением технологии больших данных в соответствии с требованиями	ПК-2.1 Выбирает методы и инструментальные средства анализа больших данных для проведения аналитических работ	– знать: методы вариационного исчисления для выполнения аналитических расчетов. – уметь: применять инструменты вариационного исчисления при решении прикладных

	заказчика		задач.
		ПК-2.2 Разрабатывает математические модели, выполняет поверку и оценку используемых моделей	– знать: модели вариационного исчисления, используемые в аналитических расчетах. – уметь: применять известные модели вариационного исчисления для решения практических задач.

4 Объем и содержание учебной дисциплины

Учебные занятия по учебной дисциплине проводятся в форме контактной работы и в форме самостоятельной работы обучающихся.

Контактная работа включает в себя занятия лекционного типа (лекции), занятия семинарского типа (семинары, практические занятия, практикумы), промежуточную аттестацию обучающихся и иные формы взаимодействия обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации ООП на иных условиях, в том числе при проведении промежуточной аттестации обучающихся. Контактная работа может проводиться с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий.

Объем учебной дисциплины

Семестр / курс		***ИТОГО***	***7 семестр***
Форма промежуточной аттестации			*экзамен*
Трудоёмкость	*академ. час.*	***144***	*144*
	зачетных единиц	***4***	*4*
Лекции, *академ. час.*		***16***	*16*
в форме практической подготовки		***0***	*0*
Лабораторные работы, *академ. час.*		***0***	*0*
в форме практической подготовки		***0***	*0*
Практические занятия, *академ. час.*		***32***	*32*
в форме практической подготовки		***0***	*0*
Курсовая работа / проект, *академ. час.*		***0***	*0*
в форме практической подготовки		***0***	*0*
Консультации, *академ. час.*		***0***	*0*
в форме практической подготовки		***0***	*0*
Самостоятельная работа, *академ. час.*		***69***	*69*
в форме практической подготовки		***0***	*0*
Контроль, *академ. час.*		***27***	*27*
в форме практической подготовки		***0***	*0*

Содержание учебной дисциплины

Раздел 1 Простейшая задача вариационного исчисления;

Тема 1.1 Функциональные пространства (Пространство непрерывных функций. Расстояние между функциями в пространстве непрерывных функций. Сильная и слабая окрестность функции);

Тема 1.2 Функционал. Вариация функционала (Понятие функционала. Функционалы в линейных и нормированных пространствах. Вариация функционала. Примеры решения задач);

Тема 1.3 Экстремум функционала. Простейшая задача вариационного исчисления (Экстремум функционала. Сильный и слабый экстремумы функционала. Необходимое условие экстремума. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Частные случаи уравнения Эйлера);

Тема 1.4 Достаточные условия экстремума функционала (Поле экстремалей. Условие Якоби. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия слабого и сильного экстремума. Условие Лежандра);

Раздел 2 Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления;

Тема 2.1 Функционалы от нескольких функций (Необходимые условия экстремали для функционалов от функций нескольких переменных. Система уравнений Эйлера-Лагранжа. Условия Лежандра и Вейерштрасса);

Тема 2.2 Функционалы от производных высших порядков (Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка. Необходимое условие экстремума. Уравнение Эйлера-Пуассона. Экстремали. Случаи понижения порядка уравнения Эйлера-Пуассона);

Тема 2.3 Функционалы от функции нескольких переменных (Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Необходимое условие экстремума. Уравнение Эйлера-Остроградского. Инвариантность уравнения Эйлера-Остроградского);

Тема 2.4 Задача Больца (Формулировка задачи Больца. Необходимые условия экстремума для задачи Больца. Правило решения задачи Больца);

Раздел 3 Вариационные задачи с подвижными границами и задачи на условный экстремум;

Тема 3.1 Простейшая задача с подвижными границами (Условия простейшей задачи с подвижными границами. Необходимые условия экстремума. Условия трансверсальности);

Тема 3.2 Задача с подвижными границами для функционалов с двумя функциями (Необходимые условия экстремума. Условия трансверсальности);

Тема 3.3 Условный экстремум функционала (Вариационные задачи с голономными и неголономными связями. Функция Лагранжа. Необходимые условия экстремума);

Тема 3.4 Изопериметрические задачи (Множители и функция Лагранжа для изопериметрической задачи);

Раздел 4 Прямые методы вариационного исчисления;

Тема 4.1 Метод Эйлера (Конечно-разностный метод Эйлера. Приведение вариационной задачи к системе алгебраических уравнений относительно значений табличной функции);

Тема 4.2 Метод Ритца (Определение коэффициентов разложения приближенного решения через координатные функции);

Тема 4.3 Оценка параметров вероятностных распределений массивов больших данных (Байесовский подход к оценке параметров вероятностных распределений массивов больших данных. Функционал Кульбака-Лейблера).

5 Перечень тем лекций

№ раздела / темы дисциплины	**Темы лекций**	**Трудоемкость, *академ.час***	
		всего	**в форме практической подготовки**
Раздел 1.	Функциональные пространства. Функционал. Вариация функционала. Экстремум функционала. Достаточные условия экстремума функционала	4	
Раздел 2.	Функционалы от нескольких функций. Функционалы от производных высших порядков. Функционалы от функции нескольких переменных.	4	
Раздел 3.	Простейшая задача с подвижными границами. Задача с подвижными границами для функционалов с двумя функциями. Условный экстремум функционала. Изопериметрические задачи.	4	
Раздел 4.	Метод Эйлера. Метод Ритца. Оценка параметров вероятностных распределений массивов больших данных.	4	
Итого:		**16**	**0**

6 Перечень тем практических занятий (семинаров)

№ раздела / темы дисциплины	**Темы практических занятий (семинаров)**	**Трудоемкость, *академ.час***	
		всего	**в форме практической**

			подготовки
Раздел 1.	Простейшая задача вариационного исчисления	8	
Раздел 2.	Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления	8	
Раздел 3.	Вариационные задачи с подвижными границами и задачи на условный экстремум	8	
Раздел 4.	Прямые методы вариационного исчисления	8	
Итого:		**32**	**0**

7 Перечень тем лабораторных работ

№ раздела / темы дисциплины	Темы лабораторных работ	Трудоемкость, *академ.час*	
		всего	в форме практической подготовки
	Отсутствуют		
Итого:		**0**	**0**

8 Перечень тем курсовых работ (проектов)

№ раздела / темы дисциплины	Темы курсовых работ (проектов)	Трудоемкость, *академ.час*	
		всего	в форме практической подготовки
	Отсутствуют		
Итого:		**0**	**0**

9 Виды самостоятельной работы

№ раздела / темы дисциплины	Виды самостоятельной работы	Трудоемкость, *академ.час*	
		всего	в форме практической подготовки
Раздел 1.	1. Изучение лекционного материала; 2. Подготовка к практическому занятию; 3. Прохождение тестирования.	17	
Раздел 2.	1. Изучение лекционного материала; 2. Подготовка к практическому занятию; 3. Прохождение тестирования.	17	

Раздел 3.	1. Изучение лекционного материала; 2. Подготовка к практическому занятию; 3. Прохождение тестирования.	17	
Раздел 4.	1. Изучение лекционного материала; 2. Подготовка к практическому занятию; 3. Прохождение тестирования.	18	
Контроль	*Подготовка к экзамену*	27	
Итого:		**96**	**0**

10 Матрица компетентностных задач по учебной дисциплине

Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Контролируемые компетенции	Оценочные средства
Раздел 1.	ПК-2	1. Вопросы для устного обсуждения (опроса); 2. Наблюдение за работой на практическом занятии; 3. Тестовые задания
Раздел 2.	ПК-2	1. Вопросы для устного обсуждения (опроса); 2. Наблюдение за работой на практическом занятии; 3. Тестовые задания
Раздел 3.	ПК-2	1. Вопросы для устного обсуждения (опроса); 2. Наблюдение за работой на практическом занятии; 3. Тестовые задания
Раздел 4.	ПК-2	1. Вопросы для устного обсуждения (опроса); 2. Наблюдение за работой на практическом занятии; 3. Тестовые задания
Экзамен.	ПК-2	1. Вопросы к экзамену; 2. Задачи к экзамену

11 Входной контроль

11.1 Цель входного контроля − определить начальный уровень подготовленности обучающихся и выстроить индивидуальную траекторию обучения. В условиях личностно-ориентированной образовательной среды результаты входного оценивания обучающегося используются как начальные значения в индивидуальном профиле академической успешности обучающегося.

11.2 Описание оценочных средств

Форма проведения входного контроля – тестирование.

Длительность тестирования – 30 минут.

Тестирование проводится в течение первых двух недель изучения учебной дисциплины в СУО «Moodle».

Для проведения тестирования используются тестовые задания для входного контроля.

Шкала оценивания результатов тестирования

За каждый правильный ответ выставляется 1 балл. Оценка выставляется в зависимости от процента правильных ответов:

Оценка формируется в соответствии с критериями таблицы:

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка
86 до 100	«отлично»
от 67до 85	«хорошо»
от 50 до 66	«удовлетворительно»
менее 50	«неудовлетворительно»

Основываясь на результатах тестирования, формируется индивидуальная траектория обучающегося (группы обучающихся), исходя из следующих соображений:

– 86 – 100 % – обучающийся готов к изучению учебной дисциплины без дополнительного повторения изученного ранее материала;

– 50 – 67 % – обучающийся в целом готов к изучению учебной дисциплины, требуется повторение отдельных вопросов(тем) изученного ранее материала, необходимого для успешного освоения учебной дисциплины;

– 49% и менее – обучающийся имеет слабую подготовку к изучению учебной дисциплины, необходимы корректирующие занятия и консультации.

Тестовые задания для входного контроля знаний обучающихся приведены в приложении.

12 Текущий контроль

12.1 Текущий контроль знаний используется для оперативного и регулярного управления учебной деятельностью (в том числе самостоятельной) обучающихся. Данный вид контроля стимулирует у обучающихся стремление к систематической самостоятельной работе по изучению учебной дисциплины и позволяет оценить степень освоения изученного материала.

Текущий контроль успеваемости осуществляется в течение семестра, в ходе повседневной учебной работы по индивидуальной

инициативе педагогического работника, в том числе посредством использования СУО «Moodle».

Формы проведения текущего контроля – вопросы для устного обсуждения (опроса); наблюдение за работой на практическом занятии; тестовые задания.

12.2 Описание оценочных средств

Шкалы оценивания (методики оценки)

12.2.1 Рекомендации по оцениванию устных ответов обучающихся

С целью контроля и подготовки обучающихся к изучению новой темы в начале занятия лекционного типа (лекции) педагогическим работником проводится индивидуальный или фронтальный устный опрос по выполненным заданиям предыдущего раздела (темы).

Критерии оценки:

– правильность ответа по содержанию задания (учитывается количество и характер ошибок при ответе);

– полнота и глубина ответа (учитывается количество усвоенных фактов, понятий и т.п.);

– сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала);

– логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться специальной терминологией);

– рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели);

– своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается умение грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе);

– использование дополнительного материала (обязательное условие);

– рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени).

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся:

– полно и аргументировано отвечает по содержанию задания;

– обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры, в том числе самостоятельно составленные;

– излагает материал последовательно и правильно.

Оценка «хорошо» ставится, если обучающийся дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «отлично», но допускает 1 – 2 ошибки, которые сам же исправляет.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

– излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;

– не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;

– излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал. Оценка «неудовлетворительно» отмечает такие недостатки в подготовке обучающегося, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

12.2.2 Рекомендации по оцениванию в процессе наблюдения за работой на практическом занятии

Подготовку к практическим работам обучающиеся осуществляют в рамках самостоятельной работы.

Критерии оценки в процессе наблюдения за работой на практическом занятии:

– самостоятельность выполнения задания и работы с методическими указаниями (учитывается работа в течение занятия, быстрота и способность нахождения в методических указаниях нужной информации);

– правильность выполнения работы (учитывается последовательность выполняемых действий, умение работать с инструментами и/или средствами вычислительной техники);

– рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения работы с учетом индивидуальных особенностей обучающихся);

– активность обучающегося при выполнении практической работы (учитывается индивидуальная работа и работа в группе).

Критерии оценки по результатам наблюдения за работой на практическом занятии

Наименование параметра оценки	Максимальное количество баллов
Самостоятельно выполняет задания; умеет работать с методическими указаниями.	2
Указанные в методических указаниях действия выполняет в	2

Наименование параметра оценки	Максимальное количество баллов
правильной последовательности; умеет работать с инструментами и/или средствами вычислительной техники.	
Рационально использует время, отведенное на задание; проявляет активность при выполнении практической работы.	1
Итого	**5**

Максимальное количество – 5 баллов соответствует оценке «отлично», 4 балла – «хорошо», 3 балла – «удовлетворительно», 2 балла – «неудовлетворительно».

12.2.3 Рекомендации по оцениванию результатов тестирования обучающихся

В завершении изучения дисциплины «Вариационное исчисление» проводится тестирование. Тестовые задания служат для быстрой проверки освоенного материала. Тестирование дает представление о том, насколько глубоко студенты овладели учебным материалом. Тестовые задания предусмотрены по каждому разделу изучаемой дисциплины. Вопросы тестовых заданий интегрированы в систему обучения Moodle СибГИУ. По завершении изучаемого раздела дисциплины обучающиеся обязаны пройти тестирование и получить оценку «зачтено». При получении оценки «не зачтено» студенты повторно проходят тестирование до тех пор, пока не будет получена оценка «зачтено».

Оценка формируется в соответствии с критериями таблицы:

Максимальный балл, %	Проходной балл, %	Оценка
100	более 50	зачтено
50	0	не зачтено

Задания и вопросы для текущего контроля знаний обучающихся по разделам (темам) учебной дисциплины приведены в приложении.

13 Промежуточная аттестация

13.1 Оценочные материалы для промежуточной аттестации обучающихся по учебной дисциплине предназначены для оценки степени достижения запланированных результатов обучения по завершению изучения учебной дисциплины в установленной учебным планом форме и позволяют определить качество усвоения изученного материала.

Итоговой формой контроля сформированности компетенций у обучающихся по учебной дисциплине является: экзамен.

Оценочные материалы для промежуточной аттестации обучающихся включают: вопросы к экзамену; задачи к экзамену.

13.2 Оценивание обучающегося на экзамене

Оценка	Требования к знаниям
отлично	Оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал различной литературы, правильно обосновывает принятое нестандартное решение, обладает приемами выполнения практических задач по формированию компетенций.
хорошо	Оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, обладает необходимыми умениями и приемами их выполнения.
удовлетворительно	Оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, испытывает сложности при выполнении практических работ и затрудняется связать теорию вопроса с практикой.
неудовлетворительно	Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, который не знает значительной части программного материала, неуверенно отвечает, допускает серьезные ошибки, не имеет представлений по методике выполнения практической работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится обучающимся, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по данной учебной дисциплине.

Задания и вопросы для промежуточной аттестации обучающихся приведены в приложении.

14 Учебно-методическое и информационное обеспечение учебной дисциплины

а) литература:

1 Болдырев, Ю. Я. Вариационное исчисление и методы оптимизации : учебное пособие. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 240 с. – ISBN 978-5-534-01707-6. – URL: https://urait.ru/bcode/438267 (дата обращения: 18.03.2025);

2 Романко, В. К. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко, Н. Х. Агаханов, В. В. Власов, Л. И. Коваленко; под ред. В. К. Романко. - 6-е изд. - Москва : Лаборатория знаний, 2020. - 222 с. - ISBN 978-5-00101-

799-8. - URL : https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785001017998.html (дата обращения: 18.03.2025);

3 Тракимус, Ю.В. Основы вариационного исчисления : учебное пособие / Тракимус Ю.В. –Новосибирск : Издательство НГТУ, 2016. – 72 с. – ISBN 978-5-7782-2833-7. – URL: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778228337.html (дата обращения: 18.03.2025);

4 Васильева, А. Б. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление в примерах и задачах : учебное пособие / А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов. – Москва : Физматлит, 2005. – 214 с. – ISBN 5-9221-0628-7. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68123 (дата обращения: 18.03.2025);

5 Лебедев, К. А. Вариационное исчисление : учебное пособие / К. А. Лебедев. - Москва : Инфра-Инженерия, 2023. - 220 с. - ISBN 978-5-9729-1224-7. - URL : https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785972912247.html. – URL: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785972912247.html (дата обращения: 18.03.2025);

6 Толпегин, О. А. Математическое программирование. Вариационное исчисление : учебное пособие для вузов / О. А. Толпегин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 233 с. — ISBN 978-5-534-11755-4. — URL: https://urait.ru/bcode/538075 (дата обращения: 18.03.2025).

б) ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

1 Консультант студента : электронно-библиотечная система / ООО «КОНСУЛЬТАНТ СТУДЕНТА». – Москва, [200 –]. – URL: http://www.studentlibrary.ru. – Режим доступа: для авторизир. пользователей;

2 ЛАНЬ : электронно-библиотечная система : [коллекция «Единая профессиональная база знаний для технических вузов - Издательство Лань" ЭБС»] / ООО «Издательство ЛАНЬ». – Санкт-Петербург, [200 –]. – URL: http://e.lanbook.com. – Режим доступа: для авторизир. пользователей;

3 НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА eLIBRARY.RU : база данных / ООО «НЭБ». – Москва, [200 –]. – URL: http://elibrary.ru. – Режим доступа: по подписке;

4 Образовательная платформа ЮРАЙТ / ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ». – Москва, [200 –]. – URL: https://urait.ru. – Режим доступа: для авторизир. пользователей;

5 Университетская библиотека онлайн : электронно-библиотечная система / ООО «Директ-Медиа». – Москва, [200 –]. – URL: https://biblioclub.ru. – Режим доступа: для авторизир. пользователей. – URL: http://www.biblioclub.ru;

6 Электронная библиотека // Научно-техническая библиотека СибГИУ : сайт. – Новокузнецк, [200 –]. – URL: http://library.sibsiu.ru/LibrELibraryFullText.asp. – Режим доступа: для авторизир. пользователей. – URL: https://library.sibsiu.ru/LibrELibraryFullText.asp;

7 Электронные периодические издания ИВИС : универсальная база данных / ООО «ИВИС». – Москва, [200 –]. – URL: http://eivis.ru. – Режим доступа: по подписке;

8 Электронный каталог : сайт / Научно-техническая библиотека СибГИУ. – Новокузнецк, [199 –]. – URL: http://libr.sibsiu.ru. – URL: https://libr.sibsiu.ru.

в) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– 7-Zip;
– Adobe Acrobat Reader;
– Astra Linux Special Edition;
– Kaspersky Endpoint Security;
– Maxima;
– Microsoft Office;
– Microsoft Windows;
– OnlyOffice;
– Р7-Офис.

г) базы данных и информационно-справочные системы:

1 ГАРАНТ : справочно-правовая система / ООО «Правовой центр «Гарант». – Кемерово, [200 –]. – Режим доступа: компьютерная сеть Сиб. гос. индустр. ун-та.;

2 КонсультантПлюс : справочно-правовая система / ООО «Информационный центр АНВИК». – Новокузнецк, [199 –]. – Режим доступа: компьютерная сеть библиотеки Сиб. гос. индустр. ун-та.;

3 Техэксперт : информационно-справочная система / ООО «Группа компаний «Кодекс». – Кемерово, [200 –]. – Режим доступа: компьютерная сеть Сиб. гос. индустр. ун-та.

15 Материально-техническое обеспечение учебной дисциплины

Материально-техническое обеспечение учебной дисциплины включает учебные аудитории, оснащенные оборудованием, компьютерной техникой, и техническими средствами обучения, в том числе:

- учебную аудиторию для проведения занятий лекционного типа, оборудованную учебной доской, экраном и мультимедийным проектором;
- учебную аудиторию для проведения занятий семинарского типа (практических занятий);
- помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной

техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду, научно-техническую библиотеку СибГИУ.

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

Составитель(и):

доцент Лактионов Сергей Андреевич (кафедра прикладной математики и информатики).

Рабочая программа дисциплины рассмотрена и утверждена на заседании кафедры.

Согласована:

Заведующий научно-исследовательской лабораторией математического моделирования КГПИ КемГУ, д.т.н., проф  В.О. Каледин

Приложение

Тестовые задания для входного контроля знаний обучающихся

Выберите один правильный ответ.

1. Даны векторы $\vec{a}=(-1;2;0)$ и $\vec{b}=(-1;5;2)$. Тогда вектор $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$ имеет координаты

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
(5; – 11;– 6)	(1; – 11;– 6)	(1; – 9;– 6)	(1; – 11; 6)

2. Разложение вектора $\vec{c}=(4;3)$ по базису векторов $\vec{a}=(1;1)$, $\vec{b}=(2;1)$ имеет вид

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
$\vec{c}=6\vec{a}-\vec{b}$	$\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$	$\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$	$\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$

3. Скалярное произведение векторов $\vec{a}=(-1;2;0)$ и $\vec{b}=(-1;5;2)$ равно

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
12	11	8	7

4. Векторное произведение векторов $\vec{a}=(-1;2;0)$ и $\vec{b}=(-1;5;2)$ равно

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
$\vec{a}\times\vec{b}=(3;-2;4)$	$\vec{a}\times\vec{b}=(4;2;-3)$	$\vec{a}\times\vec{b}=(-2;3;4)$	$\vec{a}\times\vec{b}=(2;-2;-3)$

5. Смешанное произведение векторов $\vec{a}=(-1;2;0)$, $\vec{b}=(-1;5;2)$ и $\vec{c}=(0;1;-1)$ равно

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
7	10	5	8

6. Собственные числа матрицы $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ равны

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
$\lambda_1=-3,\ \lambda_2=2$	$\lambda_1=3,\ \lambda_2=-2$	$\lambda_1=0,\ \lambda_2=2$	$\lambda_1=2,\ \lambda_2=6$

7. Значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z=x^2+2xy-3y^2$ в точке М (1;2) равно

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
– 6	12	– 8	6

8. Функция $z=x^3+y^3-15xy$ в точке М (0;0)

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
имеет максимум	имеет минимум	не имеет экстремума	не определена

9. Частное решение дифференциального уравнения $y'' = xe^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ имеет вид

Ответ 1	$y = xe^x + x + 1$
Ответ 2	$y = e^x - x + 2$
Ответ 3	$y = xe^x - 2e^x + 2x + 3$
Ответ 4	$y = xe^x - 2e^x + x + 3$

10. Указать решение уравнения $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

Ответ 1	$y = C_1e^x + C_2xe^x - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + xe^x \operatorname{arctg} x$
Ответ 2	$y = C_1e^x + C_2xe^x - xe^x \operatorname{arctg} x$
Ответ 3	$y = C_1e^x + C_2xe^x - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + xe^x \ln\left(x^2+1\right)$
Ответ 4	$y = C_1e^x + C_2e^{2x} - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x + xe^x$

Задания и вопросы для текущего контроля знаний обучающихся по разделам (темам) учебной дисциплины

Раздел 1 Простейшая задача вариационного исчисления

Устный опрос на лекции

Перечень вопросов для устного опроса

1. Приведите определения сильной и слабой окрестности кривой.
2. Что называется функционалом?
3. Приведите первое определение вариации функционала.
4. Приведите второе определение вариации функционала.
5. Что называется экстремумом функционала?
6. Какой экстремум называется сильным экстремумом, какой слабым экстремумом?
7. В чем состоит необходимое условие экстремума функционала?
8. Сформулируйте простейшую задачу вариационного исчисления.
9. Как записывается уравнение Эйлера?
10. В чем состоят достаточные условия Вейерштрасса для сильного и слабого экстремума?

Раздел 2 Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления

Устный опрос на лекции

Перечень вопросов для устного опроса

1. Как формулируется вариационная задача для функционала от нескольких функций

2. Как записывается система уравнений для определения экстремалей в случае функционала от нескольких функций?

3. Как формулируется вариационная задача для функционалов с высшими производными?

4. Как записывается уравнение Эйлера-Пуассона для функционалов с производными высших порядков?

5. Как связан порядок дифференциального уравнения Эйлера-Пуассона с порядком высшей производной, входящей в функционал?

6. Как формулируется вариационная задача для нахождения экстремалей для функционала от функции двух переменных?

7. Как записывается уравнение Эйлера-Остроградского для функционала от функции двух переменных?

8. Как формулируется задача Больца?

9. В чем состоят краевые условия в задаче Больца?

10. Как записываются условия трансверсальности в задаче Больца?

Раздел 3 Вариационные задачи с подвижными границами и задачи на условный экстремум

Устный опрос на лекции

Перечень вопросов для устного опроса

1. Как определяются краевые условия для простейшей задачи с подвижными границами?

2. Как записываются условия трансверсальности на границах?

3. Как записывается условие трансверсальности, если граничная точка перемещается по вертикальной прямой?

4. Как записывается условие трансверсальности, если граничная точка перемещается по горизонтальной прямой?

5. Сформулируйте задачу условного экстремума для функционала.

6. Какие условия называются голономными условиями, какие – неголономными?

7. Чем являются множители Лагранжа в задаче на условный экстремум?

8. Какая задача называется изопериметрической?

9. Чем отличаются множители Лагранжа в изопериметрической задаче от множителей Лагранжа в общей задаче на условный экстремум?

10. Какие условия используются при решении изопериметрической задачи?

Раздел 4 Прямые методы вариационного исчисления

Устный опрос на лекции

Перечень вопросов для устного опроса

1. Почему метод Эйлера называется методом «ломаных»?

2. К какому виду приводится простейшая вариационная задача в методе Эйлера?

3. Относительно каких переменных ищется экстремум вариационной задачи, при решении её методом Эйлера?

4. В каком виде определяется решение простейшей вариационной задачи при решении её методом Эйлера?

5. В каком виде ищется решение простейшей вариационной задачи методом Ритца?

6. Как называется система функций, относительно которых определяют решение простейшей вариационной задачи методом Ритца?

7. Какими свойствами должна обладать система координатных функций, через которые ищется решение простейшей вариационной задачи методом Ритца?

8. Относительно каких переменных ищется экстремум вариационной задачи, при решении её методом Ритца?

9. В чем состоит байесовский подход в оценке параметров?

10. Для чего используется функционал Кульбака-Лейблера?

3 Тестирование по результатам освоения лекционного материала и самостоятельной работы

Раздел 1. Простейшая задача вариационного исчисления

Тестовые задания

Один верный ответ

1. Функционалом называется

Ответ 1	отображение функции на число

Ответ 2	отображение вектора на вектор
Ответ 3	отображение функции на функцию
Ответ 4	отображение числа на число

2. Сильный экстремум –

Ответ 1	это экстремум на пространстве непрерывных функций.
Ответ 2	это экстремум на пространстве непрерывно дифференцируемых функций.
Ответ 3	это локальный экстремум (в некоторой окрестности)
Ответ 4	это наибольшее (или наименьшее) значение функционала на всей области задания.

3. Необходимое условие экстремума функционала:

Ответ 1	Первая вариация функционала обращается в ноль на множестве всех допустимых вариаций аргумента.
Ответ 2	Вторая вариация функционала обращается в ноль на множестве всех допустимых вариаций аргумента.
Ответ 3	Существует вариация аргумента, при которой первая вариация функционала обращается в ноль.
Ответ 4	Существует вариация аргумента, при которой вторая вариация функционала обращается в ноль.

4. Укажите уравнение Эйлера для функционала $J\left[y(x)\right]=\int_a^b F\left(x,y,y'\right)dx$

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
$F_y+\frac{d}{dx}F_{y'}=0$	$F_{y'}-\frac{d}{dx}F_y=0$	$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$	$F_y-\frac{d}{dy}F_{y'}=0$

5. Уравнение Эйлера для функционала $J\left[y(x)\right]=\int_0^1\left(y'^2-12xy\right)dx$ имеет вид

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
$y''+6x=0$	$y''+6y=0$	$y''-6x=0$	$y''-6y=0$

6. Общее решение уравнения Эйлера для функционала $J\left[y(x)\right]=\int_0^1\left(y'^2-12xy\right)dx$ имеет вид

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
$y=-x^3+C_1x+C_2$	$y=C_1+C_2e^{-6x}$	$y''=x^3+C_1x+C_2$	$y=C_1+C_2e^{6x}$

7. Сколько экстремалей имеет функционал $J\left[y(x)\right]=\int_0^1\left(y'^2-12xy\right)dx$, удовлетворяющий граничным условиям $y(0)=0,\ y(1)=1$.

Ответ 1	одну экстремаль
Ответ 2	не имеет ни одной экстремали

Ответ 3	бесконечно много экстремалей

Задания с закрытым ответом

8. Найти расстояние между функциями $y = x$ и $y = x^2$ на отрезке $[0;1]$. В ответе записать найденное значение с точностью 0,01.

Ответ	

9. Найти приращение функционала $J[y(x)] = \int_0^1 y \cdot y' dx$ для $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) = x$. В ответе записать найденное значение с точностью 0,01.

Ответ	

10. При каком значении α имеет решение простейшая вариационная задача $V[y] = \int_0^1 (y^2 - 2yx^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = \alpha$. Укажите значение α.

Ответ	

Раздел 2. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления

Тестовые задания

Один верный ответ

1. Уравнение Эйлера - Пуассона для функционала $J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y', y'')dx$ имеет вид

Ответ 1	$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d}{dx^2}F_{y''} = 0$
Ответ 2	$F_y + \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d}{dx^2}F_{y''} = 0$
Ответ 3	$F_y - \frac{d}{dx^2}F_{y''} = 0$

2. Экстремали функционала $J[y(x)] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx$ определяются из системы

Ответ 1	$\begin{cases} F_{y_1} - \frac{d}{dx}F_{y_1'} = 0, \\ F_{y_2} - \frac{d}{dx}F_{y_2'} = 0 \end{cases}$
Ответ 2	$\begin{cases} F_{y_1} + \frac{d}{dx}F_{y_1'} = 0, \\ F_{y_2} + \frac{d}{dx}F_{y_2'} = 0 \end{cases}$

Ответ 3	$\begin{cases} F_{y_1} - \dfrac{d}{dx} F_{y_1'} + \dfrac{d}{dx} F_{y_2'} = 0, \\ F_{y_2} - \dfrac{d}{dx} F_{y_2'} + \dfrac{d}{dx} F_{y_1'} = 0 \end{cases}$

3. Уравнение Эйлера –Пуассона для функционала $J\left[y(x)\right] = \int_0^1 \left(120xy - y''\right) dx$ имеет вид

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
$y^{(4)} = 120x$	$y^{(4)} = 120y$	$y''' = 120x$	$y''' = 120y$

4. Общее решение уравнение Эйлера –Пуассона для функционала $J\left[y(x)\right] = \int_0^1 \left(120xy - y''\right) dx$ имеет вид

Ответ 1	$y = x^5 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$
Ответ 2	$y = x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$
Ответ 3	$y = x^4 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

5. Система уравнений Эйлера для нахождения экстремалей функционала

$J\left[y_1(x), y_2(x)\right] = \int_a^b \left(y_1'^2 + y_2^2 + y_2'^2\right) dx$ имеет вид

Ответ 1	$\begin{cases} y_1'' = 0, \\ y_2 - y_2'' = 0 \end{cases}$
Ответ 2	$\begin{cases} y_1 - y_1'' = 0, \\ y_2 - y_2'' = 0 \end{cases}$
Ответ 3	$\begin{cases} y_1'' - y_1 = 0, \\ y_2'' = 0 \end{cases}$

6. Система уравнений Эйлера для нахождения экстремалей функционала

$J\left[y_1(x), y_2(x)\right] = \int_a^b \left(2y_1 y_2 - 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2\right) dx$ имеет вид

Ответ 1	$\begin{cases} y_1'' + 2y_1 - y_2 = 0, \\ y_2'' + y_1 = 0 \end{cases}$
Ответ 2	$\begin{cases} y_1 - y_1'' = 0, \\ y_2 - y_2'' = 0 \end{cases}$
Ответ 3	$\begin{cases} y_1'' + 2y_1 - 2y_2 = 0, \\ y_2'' + 2y_1 = 0 \end{cases}$

7. Уравнение Эйлера - Остроградского для функционала

$J\left[z(x,y)\right]=\iint\limits_D F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$ записывается в виде

Ответ 1	$F_z-\frac{\partial}{\partial x}F_{z'_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{z'_y}=0$
Ответ 2	$F_z-\frac{\partial}{\partial x}F_{z'_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{z'_y}=0$
Ответ 3	$F_z-\frac{\partial}{\partial x}F_{z'_y}-\frac{\partial}{\partial y}F_{z'_x}=0$

8. Уравнение Эйлера - Остроградского для функционала $J\left[z(x,y)\right]=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$ принимает вид

Ответ 1	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$
Ответ 2	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$
Ответ 3	$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$

Задания с закрытым ответом

9. Решить простейшую задачу вариационного исчисления

$$V[y]=\int\limits_0^1(-2xy+y''^2)dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=1/120,\ y'(1)=1/12$$

В ответе записать значение полученного решения в точке $x=0,5$ с точностью 0,01

Ответ	

10. Решить простейшую задачу вариационного исчисления

$$J\left[y(x)\right]=\int\limits_0^1(120xy-y'')\,dx,\ y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=6$$

В ответе записать значение полученного решения в точке $x=0,5$ с точностью 0,01

Ответ	

Раздел 3. Вариационные задачи с подвижными границами и задачи на условный экстремум

Тестовые задания

Один верный ответ

1. Условия трансверсальности для вариационной задачи с подвижными границами

$$J\left[y(x)\right]=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}F(y,y',x)dx\to extr,\ y(x_1)=y_1(x_1)=a,\ y(x_2)=y_2(x_2)$$

записывается в виде

Ответ 1	$\left[F+\left(y_1'+y'\right)F_{y'}\right]\Big\|_{x=x_1}=0, \left[F+\left(y_2'+y'\right)F_{y'}\right]\Big\|_{x=x_2}=0$
Ответ 2	$\left[F+\left(y_1'-y'\right)F_{y'}\right]\Big\|_{x=x_1}=0, \left[F+\left(y_2'-y'\right)F_{y'}\right]\Big\|_{x=x_2}=0$
Ответ 3	$\left[F_y+\left(y_1'-y'\right)F_{y'}\right]\Big\|_{x=x_1}=0, \left[F_y+\left(y_2'-y'\right)F_{y'}\right]\Big\|_{x=x_2}=0$
Ответ 4	$\left[F_{y'}+\left(y_1'-y'\right)F_{y}\right]\Big\|_{x=x_1}=0, \left[F_{y'}+\left(y_2'-y'\right)F_{y}\right]\Big\|_{x=x_2}=0$

2. Задана вариационная задача $J\left[y(x)\right]=\int_a^b F\left(y,y',x\right)dx\to extr,\ y(a)=A,\ y(b)=B$. Какая из указанных связей называется голономной?

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
$\int_a^b G\left(y,y',x\right)dx=0$	$\varphi\left(y,x\right)=0$	$\varphi\left(y,y',x\right)=0$	нет верного ответа

3. Задана вариационная задача $J\left[y(x)\right]=\int_a^b F\left(y,y',x\right)dx\to extr,\ y(a)=A,\ y(b)=B$. Какая из указанных связей называется неголономной?

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
$\int_a^b G\left(y,y',x\right)dx=0$	$\varphi\left(y,x\right)=0$	$\varphi\left(y,y',x\right)=0$	нет верного ответа

4. Задана вариационная задача $J\left[y(x)\right]=\int_a^b F\left(y,y',x\right)dx\to extr,\ y(a)=A,\ y(b)=B$. Какая из указанных связей называется изопериметрической?

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
$\int_a^b G\left(y,y',x\right)dx=0$	$\varphi\left(y,x\right)=0$	$\varphi\left(y,y',x\right)=0$	нет верного ответа

5. Функция Лагранжа для функционала $J\left[y(x)\right]=\int_a^b\left(2xy_1+y_2'^2\right)dx$ при условии $y_1-y_2=0$ записывается в виде

Ответ 1	$2xy_1+y_2'^2+\lambda(x)\left(y_1-y_2\right)$
Ответ 2	$y_1-y_2+\lambda(x)\left(2xy_1+y_2'^2\right)$
Ответ 3	$\lambda(x)+2xy_1+y_2'^2+\left(y_1-y_2\right)$
Ответ 4	нет верного ответа

6. Функция Лагранжа для изопериметрической задачи $J\left[y(x)\right]=\int_0^1 y'^2dx\to exrt$, $\int_0^1 xydx=1$ записывается в виде

Ответ 1	$L=y'^2+\lambda xy$
Ответ 2	$L=\lambda y'^2+xy$
Ответ 3	$L=y'^2-xy+\lambda(x)$
Ответ 4	нет верного ответа

7. Укажите краевую задачу, соответствующую заданной вариационной задаче

$J\left[y(x)\right]=\int_0^1\left(2xy'^2+xy^2-y\right)dx\to\min,\ y(0)=0,\ y(1)=1.$

Ответ 1	$y''+xy'-2xy-y=0,\ y(0)=1,\ y(1)=1$
Ответ 2	$2xy''+2xy'-y=0,\ y(0)=1,\ y(1)=1$
Ответ 3	$4xy''+4xy'-2xy+1=0,\ y(0)=1,\ y(1)=1$
Ответ 4	$2xy''+xy'-y+1=0,\ y(0)=1,\ y(1)=1$

Задания с закрытым ответом

8. Найти с помощью функционала расстояние между окружностью $x^2+y^2=1$ и прямой $x+y=4$. В ответе записать значение расстояния с точностью 0,01.

Ответ	

9. Решить вариационную задачу

$$V[y,z]=\int_0^1(y'^2+z'^2)dx,\ y(0)=-1,\ y(1)=-1,\ z(0)=0,\ z(1)=1$$

при условии $y+z-2x^2+x+1=0$. В ответе записать значение суммы $y(0,5)+z(0,5)$ с точностью 0,01.

Ответ	

10. Решить изопериметрическую задачу

$$V[y]=\int_0^1 y'^2dx,\ y(0)=0,\ y(1)=2,\int_0^1 xydx=1$$

В ответе записать значение $y(0,5)$ с точностью 0,01.

Ответ	

Раздел 4. Прямые методы вариационного исчисления

Тестовые задания

Один верный ответ

1. Какие методы называются прямыми методами вариационного исчисления

Ответ 1	методы интегрирования уравнений Эйлера - Лагранжа
Ответ 2	приближенные численные методы
Ответ 3	методы множителей Лагранжа
Ответ 4	нет верного ответа

2. По какой формуле заменяется функционал $V[y]=\int_a^b F\left(x,y,y'\right)dx$

в конечно-разностном методе Эйлера?

Ответ 1	$V[y]\approx\sum_{i=1}^{n-1}F\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}+y_i}{\Delta x}\right)\Delta x$
Ответ 2	$V[y]\approx\sum_{i=1}^{n-1}F\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x$
Ответ 3	$V[y]\approx\sum_{i=1}^{n-1}F\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)$
Ответ 4	$V[y]\approx\sum_{i=1}^{n-1}F\left(x_i,\frac{y_i}{\Delta x},\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x$

3. К какой системе уравнений приводится вариационная задача в конечно-разностном методе Эйлера?

Ответ 1	к линейной алгебраической системе
Ответ 2	к нелинейной системе
Ответ 3	вид системы зависит от подынтегральной функции
Ответ 4	нет верного ответа

4. В каком виде получается решение вариационной задачи при использовании конечно-разностного метода Эйлера?

Ответ 1	в виде разложения по базисным функциям
Ответ 2	в виде аналитического выражения
Ответ 3	в виде табличной функции
Ответ 4	в виде степенной функции

5. Укажите какие функции можно взять в качестве приближающих для решения вариационной задачи в методе Ритца

$J\left[y(x)\right]=\int_0^1\left(y'^2+2y\right)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=0$.

Ответ 1	$y=\alpha_1x(1-x)+\alpha_2x^2(1-x)$
Ответ 2	$y=\alpha_1x+\alpha_2x^2$
Ответ 3	$y=\alpha_1\sin x+\alpha_2\cos x$
Ответ 4	$y=\alpha_1x(1+x)+\alpha_2x^2(1+x)$

6. К какой системе уравнений относительной коэффициентов разложения приводится вариационная задача в методе Ритца?

Ответ 1	к линейной алгебраической системе
Ответ 2	к нелинейной системе
Ответ 3	вид системы зависит от подынтегральной функции
Ответ 4	нет верного ответа

7. Для чего служит Байесовский подход в анализе больших данных?

Ответ 1	для вычисления математического ожидания
Ответ 2	для вычисления дисперсии
Ответ 3	для оценки неизвестного параметра распределения
Ответ 4	для сравнения двух распределений

8. Функционал Кульбака-Лейблера определяет

Ответ 1	расхождение между распределениями
Ответ 2	математическое ожидание распределения
Ответ 3	дисперсию распределения
Ответ 4	оценку скрытого параметра распределения

Задания с закрытым ответом

9. Найти приближенное решение задачи конечно-разностным методом Эйлера при $n = 4$

$$V[y] = \int_0^1 \left[y'^2 + 2y \right] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

В ответе записать значение $y(0,5)$ с точностью 0,001.

Ответ	

10. Решить вариационную задачу с помощью метода Ритца, выбрав первое приближение в виде $y = \alpha x(1-x)$

$$V[y] = \int_0^1 \left[y'^2 - y^2 - 2xy \right] dx, \; y(0) = 0, \; y(1) = 0.$$

В ответе записать значение $y(0,5)$ с точностью 0,001.

Ответ	

4 Выполнение практических работ

Задания для практических работ, теоретический и методический материал для самостоятельного изучения и вопросы для собеседования представлены в методических указаниях к практическим занятиям.

Примеры заданий для практических работ

Раздел 1.

Тема 1.1 Функциональные пространства

1) Найти расстояние между функциями $y_1 = x^2 + 3x - 3$ и $y_2 = x + 2$.

а) в пространстве $C[-2;1]$;

б) в пространстве $C^1[-2;1]$;

в) в пространстве $C^2[-2;1]$.

2) В какую $\delta-$ окрестность функции $y_1 = x^3$ попадает функция $y_2 = x^3 - 0,03x^2$.

а) в пространстве $C[-1;1]$; б) в пространстве $C^1[-1;1]$;

в) в пространстве $C^2[-1;1]$.

Тема 1.2 Функционал. Вариация функционала

1) Найти вариацию функционалов по первому определению.

$$V[y] = \int_a^b y^2(x)\,dx.$$

2) Найти вариацию функционалов по второму определению.

$$V[y] = y(0) \cdot e^{y(1)}.$$

Тема 1.3 Экстремум функционала.

1) Решить простейшую вариационную задачу

$$V[y] = \int_{-2}^{-1} \left[2yy' - x^2 y'^2 \right] dx, \quad y(-2) = \frac{3}{2},\ y(-1) = 2.$$

2) Решить простейшую вариационную задачу

$$V[y] = \int_1^2 \left[xy'^2 + \frac{y^2}{x} + 4y \right] dx, \quad y(1) = 0,\ y(2) = 2\ln 2.$$

Тема 1.4 Достаточные условия экстремума

1) Исследовать на экстремум функционал с помощью достаточных условий

$$V[y] = \int_0^a \left[y^2 - y'^2 \right] dx,\ y(0) = 0,\ y(a) = 0 \text{ (при различных } a).$$

2) Исследовать на экстремум функционал с помощью достаточных условий

$$V[y] = \int_1^2 x^2 y'^3\,dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = \ln 2$$

Раздел 2

Тема 2.1 Функционалы от нескольких функций

1) Исследовать на экстремум функционал с двумя функциями

$$V[y,z]=\int_0^1\left[y^2+z^2+y'^2+z'^2\right]dx,$$

$$y(0)=1, y(1)=e, z(0)=1, z(0)=e.$$

2) Исследовать на экстремум функционал с двумя функциями

$$V[y,z]=\int_1^2\left[6y^2+x^2y'^2+z'^2\right]dx,\ y(1)=1,\ y(2)=4,\ z(1)=1,\ z(2)=2$$

Тема 2.2 Функционалы от производных высших порядков

1) Исследовать функционал на экстремум

$$V[y]=\int_0^1\left[4y'^2+y''^2\right]dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$$

2) Исследовать функционал на экстремум

$$V[y]=\int_0^1\left[y'^2+y''^2\right]dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=e-2,\ y'(1)=e-1$$

Тема 2.3 Функционалы от функций нескольких переменных

1) Решить вариационную задачу для функции двух переменных

$$V[z]=\iint_D\left(z_x^2+z_y^2+2xyz\right)dS,$$

$$D:\begin{cases}0\le x\le 1;\\ 0\le y\le 1;\end{cases}\quad z|_{\partial D}=\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{100}.$$

2) Решить вариационную задачу для функции двух переменных

$$V[z]=\iint_D\left(z_x^2-z_y^2+z^2+2yz\right)dS$$

$$D:\begin{cases}0\le x\le 2;\\ 0\le y\le 1;\end{cases}\quad z|_{\partial D}=\frac{x^2+y}{100}$$

Тема 2.4. Задача Больца

1) Решить задачу Больца

$$V[y]=\int_0^{\pi}(y'^2+y^2-4y\sin x)\,dx+2y^2(0)+2y(\pi)-y^2(\pi).$$

1) Решить задачу Больца

$$V[y]=\int_1^{e}2y'(xy'+y)\,dx+3y^2(1)-y^2(e)-4y(e)$$

Раздел 3

Тема 3.1 Задача с подвижными границами

1) Найти экстремаль в задаче с подвижной границей

$$V[y]=\int_0^{x_2}y'^2dx,\ y(0)=0,\ y(x_2)=-x_2-1.$$

2) Найти расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $y = x - 5$.

Тема 3.2 Задача с подвижными границами для функционалов с двумя функциями

1) Найти кратчайшее расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до прямой

$$\begin{cases} y = mx + p, \\ z = nx + q. \end{cases}$$

2) Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,1,1)$ до сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Тема 3.3 Условный экстремум функционала

1) Решить вариационную задача на условный экстремум

$$V[y,z] = \int_0^1 \left(y'^2 + z'^2 \right) dx \to extr,$$

$$y(0) = -1,\ z(0) = 0,\ y(1) = 2\,\mathrm{ch}\,1, z(1) = 2\,\mathrm{sh}\,1,\ y' - z = 0$$

2) Решить вариационную задача на условный экстремум

$$V[y,z] = \int_0^1 \left(y'^2 + z'^2 - zy' \right) dx \to extr,$$

$$y(0) = 2,\ y(1) = e,\ z(0) = 1,\ z(1) = 0,\ y - z - e^x = 0.$$

Тема 3.4 Изопериметрическая задача

1) Решить изопериметрическую задачу

$$V[y] = \int_0^1 \left[y^2 + y'^2 \right] dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 4e,\ \int_0^1 ye^x dx = 1 + e^2.$$

1) Решить изопериметрическую задачу

$$V[y] = \int_1^2 xy'^2 dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = 12,\ \int_1^2 xy dx = 9.$$

Раздел 4

Тема 4.1 Метод Эйлера

1) Найти приближенное решение задачи конечно-разностным методом Эйлера при $n = 2$ и $n = 4$

$$V[y] = \int_0^1 \left[y'^2 + 2y \right] dx,\ \ y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

2) Найти приближенное решение задачи конечно-разностным методом Эйлера при $n = 2$ и $n = 4$

$$V[y] = \int_1^2 \left[xy'^2 - \frac{x^2 - 1}{x} y^2 + 2x^2 y \right] dx,\ \ y(1) = 0,\ y(2) = 0.$$

Тема 4.2 Метод Ритца

1) Решить вариационную задачу методом Ритца

$$V[y]=\int_0^1\left[y'^2+2y\right]dx,\ \ y(0)=0,\ y(1)=0\,.$$

2) Решить вариационную задачу методом Ритца

$$V[y]=\int_0^2\left[y^2+2xy+y'^2\right]dx,\ \ y(0)=0,\ y(2)=0$$

Тема 4.3 Оценка параметров вероятностных распределений массивов больших данных

1) Имеются данные 4.3, 5.1, 7.9, 12.8, 15.9, 18.4, 21.3, 8.1, 9.6, 10.2, полученные в результате десяти наблюдений. Оценить с помощью функционала Кульбака-Лейблера параметр показательного распределения.

2) Имеются данные 1.2, 1.1, 2.7, 3.6, 4.3, 0.7, 1.3, 2.5, 4.8, 3.2, полученные в результате десяти наблюдений. Оценить с помощью функционала Кульбака-Лейблера параметр показательного распределения.

5 Вопросы к экзамену для промежуточной аттестации

1. Функциональные пространства непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций.
2. Понятие функционала. Примеры функционалов.
3. Вариация функционала. Первое и второе определения вариации.
4. Экстремум функционала. Сильный и слабый экстремум.
5. Необходимое условие экстремума.
6. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
7. Частные случаи уравнения Эйлера.
8. Поле экстремалей. Достаточные условия экстремума в простейшей задаче вариационной задаче.
9. Функционалы от нескольких функций. Система уравнений Эйлера-Лагранжа.
10. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка. Уравнение Эйлера-Пуассона.
11. Функционалы от функции нескольких переменных.
12. Задача Больца.
13. Необходимые условия экстремума в задаче Больца.
14. Вариационная задача с подвижными границами.
15. Условия трансверсальности для задачи с подвижными границами.
16. Условный экстремум с голономными условиями
17. Условный экстремум с неголономными условиями.

18. Изопериметрическая задача.
19. Функция Лагранжа для изопериметрической задачи.
20. Конечно-разностный метод Эйлера.
21. Уравнения конечно-разностного метода Эйлера.
22. Метод Ритца.
23. Выбор координатных функции в методе Ритца.
24. Байесовский подход в оценке неизвестного параметра вероятностного распределения при анализе больших данных.
25. Функционал Кульбака-Лейблера для оценки расхождения вероятностных распределений.

6 Задачи к экзамену для промежуточной аттестации

1. Найти расстояние между кривыми $y_1(x) = x$, $y_2(x) = \ln x$ на отрезке $\left[e^{-1}, e\right]$.

2. Найти приращение функционала $J\left[y(x)\right] = \int_0^1 y \cdot y' dx$ при $y(x) = e^x$, $y_1(x) = 1$.

3. Найти вариацию функционала $J\left[y(x)\right] = \int_{-1}^{1} \left(y' e^y + xy^2\right) dx$.

4. Решить простейшую вариационную задачу

$$V[y] = \int_1^e \left(xy'^2 + yy'\right) dx,\ y(1) = 0,\ y(e) = 1.$$

5. Решить задачу со свободным концом

$$V[y] = \int_0^1 \left[2y + 6y' + y'^2\right] dx,\ \ y(0) = 0.$$

6. Исследовать на экстремум функционал

$$V[y,z] = \int_0^1 \left[z^2 + y'^2 + z'^2\right] dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1,\ z(0) = 1,\ z(1) = e.$$

7. Исследовать функционал на экстремум

$$V[y] = \int_0^1 \left[2e^x y - y''^2\right] dx,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y(1) = e,\ y'(1) = 2e.$$

8. Решить задачу Больца $V[y] = \int_0^1 y'^2 dx + 4y^2(0) - 5y^2(1)$.

9. Показать, что функционал выпуклый и найденная экстремаль является точкой глобального минимума этого функционала.

$$V[y] = \int_0^1 \left[y'^2 + 10x^4 y' + 12xy\right] dx \to extr;\ y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

10. Исследовать на экстремум функционал с помощью достаточных условий $V[y]=\int_0^a\left[y^2-y'^2\right]dx,\ y(0)=0,\ y(a)=0$.(при различных a).

11. Исследовать на экстремум функционал с помощью достаточных условий $V[y]=\int_1^2 x^2y'^3\,dx,\ y(1)=0,\ y(2)=\ln 2$.

12. Исследовать на экстремум функционал с двумя функциями

$$V[y,z]=\int_0^1\left[y'^2+z'^2\right]dx,\ y(0)=0,y(1)=1,\ z(0)=0,\ z(1)=1.$$

13. Исследовать на экстремум функционал с двумя функциями

$$V[y,z]=\int_0^1\left[z^2+y'^2+z'^2\right]dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1,\ z(0)=1,\ z(1)=e.$$

14. Исследовать функционал на экстремум

$$V[y]=\int_0^1\left[-2xy+y''^2\right]dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=\frac{1}{120},\ y'(1)=\frac{1}{12}.$$

15. Исследовать функционал на экстремум

$$V[y]=\int_0^1\left[2e^xy-y''^2\right]dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=e,\ y'(1)=2e.$$

16. Решить вариационную задача на условный экстремум

$$V[y,z]=\int_0^1\left(y'^2+z'^2\right)dx\to extr,$$

$$y(0)=-1,\ z(0)=0,\ y(1)=-1,z(1)=1,\ y+z-2x^2+x+1=0.$$

17. Решить вариационную задача на условный экстремум

$$V[y,z]=\int_0^1\left(y'^2+z'^2\right)dx\to extr,$$

$$y(0)=-1,\ z(0)=0,\ y(1)=2\,\mathrm{ch}1,z(1)=2\,\mathrm{sh}1,\ y'-z=0.$$

18. Решить изопериметрическую задачу

$$V[y]=\int_0^1\left[y^2+y'^2\right]dx,\ y(0)=0,\ y(1)=-1,\ \int_0^1 ye^{-x}dx=\frac{3-e^2}{4e}.$$

19. Решить изопериметрическую задачу

$$V[y]=\int_0^{\pi}y'^2dx,\ y(0)=0,\ y(\pi)=\pi,\ \int_0^{\pi}y\sin x dx=0.$$

20. Найти минимальное расстояние между окружностью $x^2+y^2=1$ и прямой $x+y=4$.

21. Найти приближенное решение задачи конечно-разностным методом Эйлера при $n=2$ и $n=4$

$$V[y]=\int_0^1\left[y'^2+2y\right]dx,\ \ y(0)=0,\ y(1)=0.$$

22. Найти систему уравнений для приближенного решения вариационной задачи конечно-разностным методом Эйлера при $n=2$ и $n=4$

$$V[y]=\int_1^2\left[xy'^2-\frac{x^2-1}{x}y^2+2x^2y\right]dx,\ \ y(1)=0,\ y(2)=0.$$

23. Представить решение заданной вариационной задачи методом Ритца выбрав подходящие координатные функции

$$V[y]=\int_0^1\left[y'^2+2y\right]dx,\ \ y(0)=0,\ y(1)=0.$$

24. Представить решение заданной вариационной задачи методом Ритца выбрав подходящие координатные функции

$$V[y]=\int_0^2\left[y^2+2xy+y'^2\right]dx,\ \ y(0)=0,\ y(2)=0.$$

25. Для наблюдаемых значений $1,3,8,14,22,43$ оценить параметр показательного распределения с помощью функционала Кульбака-Лейблера.